روش HPJ برای حل دترمینان سه‌درسه

محمدرضا هادی پورجمالی
دانشجوی رشتهٔ مهندسی پزشکی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

در این روش جدید، برای حل دترمینان سه‌درسه مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱. دترمینان سه‌درسه را به چهار دترمینان دودردو تبدیل می‌کنیم:

$$|H|_{3\times3}=\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix}=|A| \quad \begin{vmatrix} b & c\\ e & f\end{vmatrix}=|C|$$
$$\begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix}=|B| \quad \begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}=|D|$$

۲. با حاصل چهار دترمینان دودردو یک دترمینان دودردو می‌سازیم:

$$\begin{vmatrix} |A| & |C|\\ |B| & |D|\end{vmatrix}=G$$

۳. حاصل دترمینان دودردو فوق را بر عدد مرکزی دترمینان سه‌درسه اول (e) تقسیم کنیم و به حاصل دترمینان سه‌درسه اول می‌رسیم:

$$\frac{G}{e}=|H|_{3\times3}$$

اگر نام این روش جدید را «HPJ» بنامیم، اثبات روش HPJ برای حل دترمینان سه‌درسه به‌صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix}=|A| \quad \begin{vmatrix} b & c\\ e & f\end{vmatrix}=|C|$$
$$\begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix}=|B| \quad \begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}=|D|$$

$$|A|_{2\times2}=ae-db \qquad |C|_{2\times2}=bf-ce$$
$$|B|_{2\times2}=dh-ge \qquad |D|_{2\times2}=ei-hf$$
$$\begin{vmatrix} ae-db & bf-ce\\ dh-ge & ei-hf\end{vmatrix}=|G|_{2\times2}$$

$$|G|_{2\times2}=(ae-db)(ei-hf)-(bf-ce)(dh-ge)$$
$$(ae^2i-aehf-dbei+dbhf)-(bfdh-bfge-cedh+ce^2g)$$
$$=ae^2i-aehf-dbei+\cancel{dbhf}-\cancel{bfdh}+bfge+cedh-ce^2g$$
$$|G|_{2\times2}=ae^2i+bfge+cedh-ce^2g-aehf-dbei \quad (۱)$$
$$=e(aei+bfg+cdh-ceg-ahf-dbi)$$

و به کمک «روش ساروس» داریم:

$$\left|\begin{matrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b\\ d & e\\ g & h\end{matrix}=|H|_{3\times3}$$

$$|H|_{3\times3}=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$
$$=aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi \quad (۲)$$
$$\xRightarrow{\text{از مقایسهٔ (۱) و (۲)}} \frac{|G|_{2\times2}}{e}=|H|_{3\times3}$$

توضیح هیئت تحریریه

ضمن تشکر از این خوانندهٔ محترم مجله که با ابداع این روش، علاقه‌مندی خود را به ریاضیات نشان داده‌اند، برای آگاهی ایشان و خوانندگان مجله، به اطلاع می‌رساند که روشی مشابه این روش با عنوان «روش تحویل» برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های $n\times n$ وجود دارد که در کتاب‌های متعددی به آن اشاره شده است. این دستور به‌صورت زیر است:

$$|A|=\left(\frac{1}{a_{11}}\right)^{n-2}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{2n}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{31} & a_{3n}\end{vmatrix}\\ \vdots & & \vdots\\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{n1} & a_{n2}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{n1} & a_{nn}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

و این دستور برای ماتریس سه‌درسه $A=\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ به‌صورت ذیل است:

$$|A|=\frac{1}{a}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c\\ d & f\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a & b\\ g & h\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c\\ g & i\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

با استفاده از این دستور، می‌توان دستور HPJ را با کمی تبدیل‌های ماتریسی استخراج کرد. می‌دانیم که با جابه‌جا کردن دو سطر (یا ستون) در یک ماتریس علامت آن عوض می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$|A|=-\begin{vmatrix} b & a & c\\ e & d & f\\ h & g & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e & d & f\\ b & a & c\\ h & g & i\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{e}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} e & d\\ b & a\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f\\ b & c\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} e & d\\ h & g\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\frac{1}{e}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c\\ e & f\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{e}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c\\ e & f\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$